

О РАСШИРЕНИИ ТИПОВ С СОХРАНЕНИЕМ ДИАГРАММ

Канат Жанзакович Кудайбергенов

Институт математики и математического моделирования,
Алматы, Казахстан

kanatkud@gmail.com

Аннотация

Изучается вопрос о возможности расширения D -типов с сохранением диаграммы. Доказано, что если заданы диаграмма D некоторой λ -однородной модели и семейство S таких D -типов, что область определения каждого из них имеет мощность меньше λ и содержится в D -множестве B , то существует генерическое расширение V исходной модели V_0 теории множеств ZFC, в котором каждый тип из S расширяется до D -типа над B , причем, если $\lambda = k^+$, то в модели V сохраняются все кардиналы модели V_0 , не превосходящие λ . Указаны условия, при которых в модели V сохраняются все кардиналы модели V_0 .

Ключевые слова и фразы

D -однородная модель, D -тип, расширение D -типа.

Источник финансирования

Работа поддержана Комитетом науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант AP19677434).

Для цитирования

Кудайбергенов К. Ж. О расширении типов с сохранением диаграммы // Математические труды, 2025, Т. 28, № 4, С. 105-113. DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-4-105-113.

Extending types preserving diagram

Kanat Zh. Kudaibergenov

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

kanatkud@gmail.com

Abstract

The possibility of extending D -types while preserving the diagram is being studied. It is proved that if a diagram D of some λ -homogeneous model and a family S of D -types such that the domain of each of them has the cardinality less than λ and is contained in a D -set B are given, then there exists a generic extension V of the original model V_0 of the set theory ZFC in which every type from S extends to a D -type over B , and if $\lambda = k^+$ then in the model V all cardinals of the model V_0 not greater than λ are preserved. Conditions under which all cardinals of the model V_0 are preserved in the model V are specified.

Keywords

D -homogeneous model, D -type, extension of a D -type.

Funding

The work supported by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan (grant AP19677434).

For citation

Kudaibergenov K. Zh. Extending types preserving diagram // *Mat. Trudy*, 2025, V. 28, N. 4, P. 105-113. DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-4-105-113.

Введение

При изучении однородных моделей с фиксированной диаграммой D одним из основных препятствий является задача расширения D -типов с сохранением диаграммы. Иногда это препятствие удается обойти, но иногда возможность указанного расширения D -типов (или что-то эквивалентное этому) приходится формулировать как дополнительное условие. Например, такого рода условие используется в работе автора [1].

В данной работе мы приведем некоторое "относительное" решение упомянутой задачи. Мы докажем, что если D – диаграмма λ -однородной модели, а S – семейство D -типов, область определения каждого из которых имеет мощность меньше λ и содержится в D -множестве B , то существует генерическое расширение исходной модели теории множеств ZFC, в котором каждый тип из S расширяется до D -типа над B . Кроме того, если $\lambda = k^+$, то в этом генерическом расширении сохраняются все кардиналы исходной модели теории множеств ZFC, не превосходящие λ . Отсюда следует, что в теории множеств ZFC не доказуемо, что существуют диаграмма D ω -однородной модели, D -множества $A \subseteq B$, где $|A| < \omega$, и D -тип p над A , который не расширяется до D -типа над B . Кроме того, мы покажем, что условие расширения D -типов эквивалентно существованию (D, λ) -однородных моделей для сколь угодно больших λ . Это будет сделано в § 2. В § 1 мы приведем необходимые определения.

§ 1. Предварительные сведения

В дальнейшем T – полная теория, имеющая бесконечную модель. Пусть $\mathfrak{C}$ – некоторая достаточно насыщенная модель теории T . Модели теории T (и их подмножества, элементы), с которыми мы будем иметь дело, будут элементарными подмоделями (подмножествами, элементами) модели $\mathfrak{C}$. Мощность множества A будет обозначаться через $|A|$.

Ординалы будут обозначаться через $\alpha, \beta, \gamma, i, j, n$, а бесконечные кардиналы – через $\kappa, \lambda, \mu, \nu$. Первый бесконечный кардинал будет обозначаться через ω . Через λ^+ обозначаем первый кардинал, который больше λ . Множества мощности меньше λ назовем λ -малыми.

Как в [2], $D(A)$ будет обозначать множество всех типов над $\emptyset$, которые реализуются (в некоторой модели, содержащей множество A) конечными кортежами элементов из A . Через D будет обозначаться множество вида $D(M)$ для некоторой модели M . Множество D называется в [2] *конечной диаграммой*, но мы для удобства будем называть его просто *диаграммой*. Множество A называется *D-множеством*, если $D(A) \subseteq D$. Модель N называется *D-моделью*, если $D(N) = D$.

"Тип над A " будет означать "полный n -тип над A ", т.е. максимальное совместное множество формул с n свободными переменными $\bar{x}$ и с параметрами из A . Через $\text{tp}(\bar{a}/A)$ обозначим тип над A , реализуемый кортежом $\bar{a}$. Для типа p над A назовем A *областью определения типа p* и пишем $\text{dom } p = A$.

Тип p над A называется *D-типом* (над A), если для некоторого (эквивалентно, любого) кортежа $\bar{a}$, реализующего p , множество $A \cup \bar{a}$ является D -множеством. Множество всех D -типов над A обозначим через $S_D(A)$.

Лемма 1.0. (1) Объединение возрастающей цепи D -множеств является D -множеством.

(2) Объединение возрастающей цепи D -типов является D -типом.

Доказательство следует из определений.

Определение. (1) Модель M называется λ -однородной, если для любого $A \subseteq M$ мощности $|A| < \lambda$ и любого $a \in M$ каждое элементарное отображение из A в M продолжается до элементарного отображения из $A \cup \{a\}$ в M .

(2) Модель M называется (D, λ) -однородной, если $D(M) = D$ и M является λ -однородной.

Нам понадобится следующий результат Кейслера и Морли [3].

Лемма 1.1. Если M – (D, λ) -однородная модель и $A \subseteq B$ – такие D -множества, что $|A| < \lambda$ и $|B| \leq \lambda$, то любое элементарное отображение из A в M продолжается до элементарного отображения из B в M .

Из леммы 1.1 вытекает следующая

Лемма 1.2. Модель M является (D, λ) -однородной, если и только если $D(M) = D$ и для любого $A \subseteq M$ мощности $|A| < \lambda$ каждый D -тип над A реализуется в M .

Для типа p над A и элементарного отображения $f : A \rightarrow \mathfrak{C}$ пусть

$$f(p) = \{\varphi(x, f(\bar{a})) : \varphi(x, \bar{a}) \in p\}.$$

Лемма 1.3. Для любого D -типа p над A и элементарного отображения $f : A \rightarrow \mathfrak{C}$ множество $f(p)$ является D -типом над $f(A)$.

Доказательство следует из определений.

Мы будем использовать метод вынуждения [4] и, в частности, понятия плотного множества и генерического множества. Пусть $(P, \leq)$ – частично упорядоченное множество, F – семейство множеств. Множество $D \subseteq P$ называется *плотным*, если для любого $p \in P$ найдется $q \in D$ такое, что $q \leq p$. Множество $G \subseteq P$ называется *F -генерическим*, если

- (i) $p \in G$ и $p \leq q$ влечет $q \in G$;
- (ii) для любых $p, q \in G$ найдется $r \in G$ такое, что $r \leq p$ и $r \leq q$;
- (iii) $G \cap D \neq \emptyset$ для каждого плотного $D \subseteq P$ такого, что $D \in F$.

С помощью подходящего генерического множества будет построено нужное нам генерическое расширение исходной модели теории множеств. А для доказательства того, что кардиналы исходной модели сохраняются в генерическом расширении, нам понадобятся следующие два понятия.

Пусть μ – несчетный кардинал. Говорят, что частично упорядоченное множество $(P, \leq)$ удовлетворяет μ -условию антицепей, если любая антицепь $A \subseteq P$ имеет мощность меньше μ .

Частично упорядоченное множество $(P, \leq)$ называется κ -замкнутым, если для любого $\gamma \leq \kappa$ и любых $p_\alpha \in P$, $\alpha < \gamma$, таких, что $p_\beta \leq p_\alpha$ для всех $\alpha < \beta < \gamma$, найдется такое $p \in P$, что $p \leq p_\alpha$ для всех $\alpha < \gamma$.

§ 2. Результаты

Определение. (1) Говорим, что для теории T выполняется λ -условие расширения D -типов, если для любых D -множеств A и B таких, что $A \subseteq B$ и $|A| < \lambda$, любой D -тип над A расширяется до D -типа над B .

(2) Говорим, что для теории T выполняется условие расширения D -типов, если для любого λ для теории T выполняется λ -условие расширения D -типов.

Теорема 2.1. (1) Если для теории T выполняется λ -условие расширения D -типов, то T имеет (D, λ) -однородную модель.

(2) Следующие условия эквивалентны:

(i) для теории T выполняется условие расширения D -типов;

(ii) для любого λ теория T имеет (D, λ) -однородную модель.

Доказательство. (1) Допустим, что для T выполняется λ -условие расширения D -типов. Чтобы построить (D, λ) -однородную модель теории T , индукцией по $\alpha < \lambda^+$ определим возрастающую цепь D -множеств $\{M_\alpha : \alpha < \lambda^+\}$ следующим образом.

В качестве M_0 возьмем D -модель теории T .

Полагаем $M_\delta = \bigcup_{\alpha < \delta} M_\alpha$ для предельных ординалов $\delta \leq \lambda^+$. Тогда M_δ , будучи объединением цепи D -множеств, тоже будет D -множеством по лемме 1.0(1).

Предположим, что M_α уже определено, и определим $M_{\alpha+1}$. Пусть $\{p_i^\alpha : i < \mu_\alpha\}$ – множество всех D -типов над λ -малыми подмножествами множества M_α . Индукцией по $i < \mu_\alpha$ построим возрастающую цепь D -множеств $\{M_{\alpha,i} : i < \mu_\alpha\}$ следующим образом.

Полагаем $M_{\alpha,0} = M_\alpha$ и $M_{\alpha,j} = \bigcup_{i < j} M_{\alpha,i}$ для предельных ординалов $j \leq \mu_\alpha$. Тогда $M_{\alpha,j}$, будучи объединением цепи D -множеств, тоже будет D -множеством по лемме 1.0(1). Допустим, что $M_{\alpha,i}$ определено. В силу λ -условия расширения D -типов, p_i^α расширяется до D -типа q_i^α над $M_{\alpha,i}$. Пусть элемент a_i^α реализует q_i^α . Полагаем $M_{\alpha,i+1} = M_{\alpha,i} \cup \{a_i^\alpha\}$. Тогда $M_{\alpha,i+1}$ будет D -множеством.

Полагаем $M_{\alpha+1} = M_{\alpha,\mu_\alpha}$ и $M = M_{\lambda^+}$.

Покажем, что $M \prec \mathfrak{C}$ и потому $M \models T$. Для этого используем тест Тарского–Воота. Рассмотрим произвольную формулу $\varphi(x, \bar{y})$ языка теории T и предположим, что $\mathfrak{C} \models \exists x \varphi(x, \bar{a})$, где $\bar{a} \in M$. Нужно показать, что $\mathfrak{C} \models \varphi(b, \bar{a})$ для некоторого $b \in M$.

Так как $\bar{a}$ – конечное D -множество, а M_0 является D -моделью, то существует элементарное отображение $f : \bar{a} \rightarrow M_0$. Тогда $M_0 \models \exists x \varphi(x, f(\bar{a}))$, поэтому $M_0 \models \varphi(c, f(\bar{a}))$ для некоторого $c \in M_0$. Так как тип $q = \text{tp}(c/f(\bar{a}))$ является D -типом, то по лемме 1.3 тип $p = f^{-1}(q)$ является D -типом над $\bar{a}$. Имеем $\bar{a} \in M_\alpha$ и $p = p_i^\alpha$ для некоторых $\alpha < \lambda^+$ и $i < \mu_\alpha$. По построению элемент a_i^α реализует q_i^α и $p = p_i^\alpha \subseteq q_i^\alpha$. Так как $\varphi(x, f(\bar{a})) \in q$, то $\varphi(x, \bar{a}) \in f^{-1}(q) = p$. Следовательно, $\mathfrak{C} \models \varphi(a_i^\alpha, \bar{a})$, где $a_i^\alpha \in M$.

Итак, M является D -моделью теории T . Покажем, что M является λ -однородной. Рассмотрим D -тип p над $B \subseteq M$, где $|B| < \lambda$. Тогда $B \subseteq M_\alpha$ для некоторого $\alpha < \lambda^+$ и по построению тип p реализуется в M . Остается применить лемму 1.2.

(2) Импликация (i) $\Rightarrow$ (ii) следует из (1). Докажем импликацию (ii) $\Rightarrow$ (i). Пусть A и B – D -множества, $A \subseteq B$, p – D -тип над A . Надо доказать, что p расширяется до D -типа над B .

В силу (ii) теория T имеет $(D, |B|^+)$ -однородную модель N . По лемме 1.1 существует элементарное отображение $f : B \rightarrow N$. По лемме 1.3 $f(p)$ является D -типом, поэтому по лемме 1.2 $f(p)$ реализуется некоторым элементом $a \in N$. Тип $q = \text{tp}(a/f(B))$ является D -типом, поскольку реализуется в D -модели. Так как $f(p) \subseteq q$, то $p \subseteq f^{-1}(q)$. И по лемме 1.3 $f^{-1}(q)$ является D -типом над B . $\square$

Теорема 2.2. В счетной транзитивной модели V_0 теории множеств ZFC пусть D – диаграмма λ -однородной модели, и пусть S – семейство D -типов, область определения каждого из которых имеет мощность меньше λ и содержится в D -множестве B . Тогда существует генерическое расширение V модели V_0 , в котором каждый тип из S расширяется до D -типа над B , причем, если $\lambda = k^+$, то в модели V сохраняются все кардиналы модели V_0 , не превосходящие λ . Кроме того, если в модели V_0 выполняется следующее условие

$$(0) |L| + |S| < \lambda = k^+ = 2^k, |B| \leq \lambda,$$

то все кардиналы модели V_0 сохраняются в модели V .

Доказательство. Рассмотрим декартово произведение

$$P = \prod_{p \in S} Q_p,$$

где

$$Q_p = \{q \in S_D(C) : C \subseteq B, |C| < \lambda, p \subseteq q\}.$$

Элементами множества P являются функции

$$f : S \rightarrow \bigcup_{p \in S} Q_p$$

такие, что $f(p) \in Q_p$ для любого $p \in S$. Частично упорядочим P , полагая

$$f \leq g \Leftrightarrow (\forall p \in S)[g(p) \subseteq f(p)].$$

Пусть $G \subseteq P$ является V_0 -генерическим множеством, $V = V_0[G]$ – соответствующее генерическое расширение модели V_0 .

Для $p \in S$ пусть

$$G_p = \{f(p) : f \in G\}, \quad p^* = \bigcup G_p.$$

Если $f \in G \subseteq P$, то $f(p) \in Q_p$ и потому $p \subseteq f(p)$. Следовательно, $p \subseteq p^*$. Осталось показать, что $p^* \in S_D(B)$.

(1) Для любого конечного $C \subseteq B$ существует тип $q \in S_D(C)$ такой, что $q \subseteq p^*$.

Действительно, пусть $C \subseteq B$ конечно и

$$E_C = \{f \in P : C \subseteq \text{dom} f(p)\}.$$

Докажем, что множество E_C плотно. Пусть $f_0 \in P$ и $C_0 = \text{dom} f_0(p)$. Тогда $|C_0| < \lambda$. По условию существует (D, λ) -однородная модель M . Так как $C \cup C_0 \subseteq B$, то $C \cup C_0$ является D -множеством. Так как $|C_0| < \lambda$ и C конечно, то $|C \cup C_0| < \lambda$. По лемме 1.1 существует элементарное отображение $\gamma : C \cup C_0 \rightarrow M$. По лемме 1.3 $\gamma(f_0(p))$ является D -типом. Тогда по лемме 1.2 найдется кортеж $\bar{a} \in M$, реализующий тип $\gamma(f_0(p))$. Пусть $q_1 = \text{tp}(\bar{a}/\gamma(C \cup C_0))$. Тип q_1 является D -типом, поскольку реализуется в D -модели. Определим функцию $f_1 : S \rightarrow \bigcup_{p \in S} Q_p$, полагая $f_1(p) = \gamma^{-1}(q_1)$ и $f_1(r) = f_0(r)$ для любого $r \in S \setminus \{p\}$. Тогда $f_1 \leq f_0$ и $f_1 \in E_C$, что доказывает плотность множества E_C .

В силу плотности E_C и генеричности G существует $g \in G \cap E_C$. Тогда $g(p) \subseteq p^*$ и $g(p) \in S_D(C')$ для некоторого $C' \supseteq C$, откуда следует (1).

(2) Если $\varphi(\bar{x}, \bar{b}) \in p^*$, то $\bar{b} \in B$.

Действительно, если $\varphi(\bar{x}, \bar{b}) \in p^* = \bigcup G_p$, то существует $f \in G \subseteq P$ такое, что $\varphi(\bar{x}, \bar{b}) \in f(p)$. Но $f(p) \in Q_p$ и потому $f(p) \in S_D(C)$ для некоторого $C \subseteq B$.

(3) Для любой формулы φ с теми же переменными, что и формулы из p^* , и с параметрами из B имеем $\varphi \in p^*$ или $\neg\varphi \in p^*$.

Это следует из (1).

(4) p^* – совместное множество формул.

Действительно, если p^* несовместно, то для некоторого $n < \omega$ найдутся $f_i \in G$ и формулы $\varphi_i \in f_i(p)$, $i < n$, такие, что их конъюнкция $\bigwedge_{i < n} \varphi_i$ несовместна. В силу генеричности G существует $f^* \in G$ такое, что $f^* \leq f_i$ для любого $i < n$. Тогда $\varphi_i \in f_i(p) \subseteq f^*(p)$ для любого $i < n$ и потому $\bigwedge_{i < n} \varphi_i \in f^*(p)$, что противоречит совместности $f^*(p)$.

Из (2)–(4) следует, что $p^* \in S_D(B)$.

Мы доказали, что в модели V каждый тип из S расширяется до D -типа над B .

Докажем, что каждый кардинал μ модели V_0 такой, что $\mu \leq \lambda$, сохраняется в модели V . Для этого в силу [4, предложение 3.11] и [4, следствие 3.13] достаточно проверить, что частично упорядоченное множество $(P, \leq)$ является k -замкнутым.

Пусть $f_\alpha \in P$, $\alpha < \gamma \leq k$, где $f_\beta \leq f_\alpha$ для любых $\alpha < \beta < \gamma$. Тогда $f_\alpha(p) \subseteq f_\beta(p)$ для любого $p \in S$ и любых $\alpha < \beta < \gamma$. Так как $f_\alpha(p) \in Q_p$ для всех $\alpha < \gamma$, то

а) по лемме 1.0(1) $\bigcup_{\alpha < \gamma} f_\alpha(p)$ является D -типом;

б) $|\text{dom}(\bigcup_{\alpha < \gamma} f_\alpha(p))| \leq k \cdot |\gamma| \leq k \cdot k = k$.

Следовательно,

$$\bigcup_{\alpha < \gamma} f_\alpha(p) \in Q_p$$

для любого $p \in S$. Полагая

$$f(p) = \bigcup_{\alpha < \gamma} f_\alpha(p)$$

для всех $p \in S$, мы получаем функцию $f \in P$ такую, что $f \leq f_\alpha$ для всех $\alpha < \gamma$. Следовательно, частично упорядоченное множество $(P, \leq)$ является k -замкнутым.

Теперь предположим, что выполняется условие (0), и докажем, что $|P| \leq 2^k$. Тогда частично упорядоченное множество $(P, \leq)$ будет удовлетворять $(2^k)^+$ -условию антицепей, откуда в силу [4, теорема 3.4] любой кардинал μ модели V_0 такой, что $\mu > 2^k = k^+$, сохраняется в модели V .

В силу (0) имеем $|S| \leq k$, поэтому

$$|P| = \left| \prod_{p \in S} Q_p \right| = \left| \bigcup_{p \in S} Q_p \right|^{|S|} \leq \left| \bigcup_{p \in S} Q_p \right|^k.$$

Далее,

$$Q_p \subseteq \{S_D(C) : C \subseteq B, |C| \leq k\}$$

и если $|C| \leq k$, то

$$|S_D(C)| \leq 2^{k+|L|} = 2^k.$$

Поэтому

$$|Q_p| \leq 2^k \cdot |B|^k \leq 2^k \cdot (2^k)^k = 2^k \cdot 2^k = 2^k.$$

Следовательно,

$$\left| \bigcup_{p \in S} Q_p \right| \leq 2^k \cdot |S| \leq 2^k \cdot k = 2^k,$$

откуда

$$|P| \leq \left| \bigcup_{p \in S} Q_p \right|^k \leq (2^k)^k = 2^k.$$

□

Следствие 2.3. В теории множеств ZFC не доказуемо, что существуют диаграмма D ω -однородной модели, D -множества $A \subseteq B$, где $|A| < \omega$, и D -тип p над A , который не расширяется до D -типа над B .

Список литературы

1. Кудайбергенов К. Ж. Однородность высокая и низкая // *Матем. тр.* 2021. Т. 23, № 2. С. 100–121.
2. Shelah S. Finite diagrams stable in power // *Ann. Math. Logic.* 1970. V. 2. P. 69–118.
3. Keisler H. J., Morley M. D. On the number of homogeneous models of a given power // *Israel J. Math.* 1967. V. 5, N 2. P. 73–78.
4. Burgess J. P. Forcing. In: *Handbook of mathematical logic.* North-Holland, 1977.
5. Йех Т. Теория множеств и метод форсинга. М.: Мир, 1973.

References

1. Kudaibergenov K. Zh. High and low homogeneity // *Math. Proc.* 2021. V. 23, N 2. P. 100–121.
2. Shelah S. Finite diagrams stable in power // *Ann. Math. Logic.* 1970. V. 2. P. 69–118.
3. Keisler H. J., Morley M. D. On the number of homogeneous models of a given power // *Israel J. Math.* 1967. V. 5, N 2. P. 73–78.
4. Burgess J. P. Forcing. In: *Handbook of mathematical logic.* North-Holland, 1977.
5. Jech T. Set theory and the method of forcing. M.: Mir, 1973.

Информация об авторе

Канат Жанзакович Кудайбергенов, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник

SPIN 5278-0838 AuthorID: 1249925

Scopus Author ID 24341020100

Author Information

Kanat Zh. Kudaibergenov, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Senior Researcher

SPIN 5278-0838 AuthorID: 1249925

Scopus Author ID 24341020100

*Статья поступила в редакцию 20.05.2025;
одобрена после рецензирования 27.10.2025; принята к публикации
05.11.2025*

*The article was submitted 20.05.2025;
approved after reviewing 27.10.2025; accepted for publication 05.11.2025*

ISSN 1560-750X

Математические труды, 2025, Том 28, № 4, С. 105–113

Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 4, P. 105–113